

Έξετάσεις Περιόδου Ιουνίου στο μάθημα Μιγαδικές Συναρτήσεις I

- [1.0] Να βρείτε τις κυλικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $1 + i\sqrt{3}$ και $\sqrt{3} - i$.
- [0.4] α) Έξηγείστε πότε μία μιγαδική συνάρτηση είναι ολόμορφη σε ένα σημείο.
[0.3] β) Να δώσετε ένα παράδειγμα (μη τετριμμένης) άκεραιας συνάρτησης f .
[0.3] γ) Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης g ή οποία δεν είναι άκεραια.
- [1.0] Να αποδείχθεί ότι, αν f είναι μία άκεραια μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
- [0.9] α) Να δώσετε μία παραμετρική παράσταση της τεθλασμένης καμπύλης με κορυφές τα σημεία $1, i, -1$.
[1.0] β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \left[|z|^2 + z^2 + \cos^2(z) \right] dz,$$

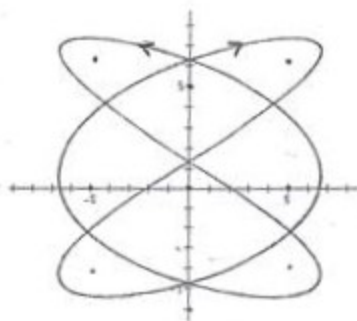
όπου γ είναι καμπύλη που δίνεται στο ερώτημα (α).

- [1.5] Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{z-1}{z(1+z)}.$$

Να την αναπτύξετε στον δακτύλιο $\Delta(1, 2)$ σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο 1.

- [1.4] Να αποδείξετε ότι ο δείκτης στροφής μιας κλειστής κατά τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης γ ως προς κάποιο σημείο $z \in \mathbb{C}$, με $z \notin \gamma$, είναι ένας άκεραιος αριθμός.
- [0.9] α) Να υπολογίσετε τους δείκτες στροφής της καμπύλης του σχήματος ως προς τα σημεία $0, 5, -5, 5i, 5+6i, -5+6i, 5-4i, -5-4i, -6i$.



- [1.3] β) Κατά μήκος της παραπάνω καμπύλης γ , να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z-5}, \quad \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 - 12iz - 61}, \quad \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + 25}.$$